BEITRÄGE

ZUR

ANWENDUNG DER GRUPPENTHEORIE

AUF KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITAT ZU TÜBINGEN

VORGELEGT

VON

FRANZ HACK

AUS STUTTGART.

TÜBINGEN, 1895.

DRUCK VON HEINRICH LAUPP JR.

BEITRÄGE

ZUR

ANWENDUNG DER GRUPPENTHEORIE

AUF KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

VORGELEGT

VON

FRANZ HACK
AUS STUTTGART.

TÜBINGEN, 1895.
DRUCK VON HEINRICH LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen am 11. Mai 1895.

In den „Sitzungsberichten der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg“ vom Februar 1892 bestimmt Herr Professor Dr. Weber anlässlich einer allgemeineren Untersuchung die regulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads. Die vorliegende Arbeit bildet in der Hauptsache eine Ergänzung und Fortführung des dort Angegebenen; an die algebraischen Entwicklungen schliessen sich einige geometrische Anwendungen.

Die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Gegenstand verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Hölder, dem ich hiemit meinen herzlichsten Dank ausspreche für das liebenswürdige Entgegenkommen, das mir während meiner Studienzeit, wie bei Abfassung dieser Arbeit von ihm zu teil wurde.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552309_0023

Einleitung.

Den nachfolgenden Untersuchungen über Gleichungen liegt die Festsetzung eines bestimmten Rationalitätsbereichs zu Grunde. Die Untersuchungen beschränken sich nicht auf den Fall, dass der Rationalitätsbereich der absolute (aus den gewöhnlichen Rationalzahlen bestehende) sei; doch ist der Kürze halber statt „Grösse des Rationalitätsbereichs" meist „rationale Grösse", statt „Quadrat einer Grösse des Rationalitätsbereichs": „Quadratzahl" gesagt.

Die beiden Werte, welche einer Irrationalität $\sqrt{A}$ zukommen, sind als $+\sqrt{A}$ und $-\sqrt{A}$ unterschieden, womit natürlich nicht gesagt sein soll, dass $+\sqrt{A}$ notwendig eine positive, $-\sqrt{A}$ eine negative reelle Zahl sei.

Die Gleichungswurzeln sind in gewohnter Weise durch Indices von 1 an bezeichnet; ebenso die Substitutionen in der üblichen Art, so dass z. B. (1 3) (2 4) die gleichzeitige Vertauschung von x_1 mit x_3 und x_2 mit x_4, (1 2 3 4) den cyklischen Uebergang von x_1, x_2, x_3, x_4 zu x_2, x_3, x_4, x_1 bedeutet.

Das Werk: Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra, Leipzig 1882, ist im folgenden stets mit dem Namen des Verfassers ohne weiteren Zusatz citiert.

§ 1. Die Abel'schen Gleichungen dritten Grads.

Es giebt zwei Arten von irreducibeln kubischen Gleichungen:

1) Abel'sche Gleichungen; ihre Diskriminante Δ ist eine Quadratzahl, das Differenzenprodukt $\Pi(x_1 - x_2)$ rational; die Gruppe dieser Gleichungen umfasst die Substitutionen 1, (1 2 3), (1 3 2).
2) Allgemeine Gleichungen dritten Grads; ihre Diskriminante ist keine Quadratzahl, das Differenzenprodukt ist nicht rational; die Gruppe ist die symmetrische dritten Grads.

Wir bestimmen zunächst die Form der Abel'schen Gleichungen dritten Grads und bedienen uns hiezu der Resolvente:

$$u = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3,$$

wo $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ die beiden komplexen dritten Einheitswurzeln sind. Da u durch die Substitution (1 2 3) den Faktor ω, durch die Substitution (1 3 2) den Faktor ω^2 annimmt, so ist nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise u^3 eine Grösse des Rationalitätsbereichs; allein dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass man vorher ω (oder $\sqrt{-3}$) adjungiert hat. Man bestätigt dies leicht durch Ausrechnung von u^3, welche ergiebt[1]):

$$u^3 = \Sigma x_1^3 - 3\Sigma x_1^2 x_2 - 6x_1x_2x_3 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-3}\,.\,\Pi(x_1 - x_2).$$

Man hat also folgendermassen zu verfahren: bedeuten a, M, N Grössen des ursprünglichen Rationalitätsbereichs, so ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3a,$$
$$u = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = 3\sqrt[3]{M + N\sqrt{-3}}\,.$$
$$v = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = 3\sqrt[3]{M - N\sqrt{-3}},$$

Dabei ist N bis auf einen Zahlenkoeffizienten mit dem Differenzenprodukt identisch und muss deshalb, sowie aus dem Grund, weil sonst $\sqrt{-3}$ herausfallen würde, von Null verschieden angenommen werden (I)[2]).

Nun ist aber:

$$uv = \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 x_2\,,$$

also uv eine symmetrische Funktion der Gleichungswurzeln, somit sicher eine Grösse des ursprünglichen Rationalitätsbereichs; m. a. W.: es muss:

$$M^2 + 3N^2 = r^3$$

sein, für r als eine Grösse des ursprünglichen Rationalitätsbereichs. Wir suchen diese zahlentheoretische Bedingung zu erfüllen; wir betrachten zunächst den Fall

1) $r \neq 0$. Dann setze man:

$$M = m\,.\,r, \quad N = n\,.\,r,$$

wo nun m und n notwendig rational sind; es folgt:

$$r = m^2 + 3n^2, \quad M = m(m^2 + 3n^2), \quad N = n(m^2 + 3n^2).$$

Der Fall $m^2 + 3n^2 = 0$ widerspricht der Annahme $r \neq 0$, ist also auszuschliessen (II), ebenso der Fall $n = 0$, der im Widerspruch mit Voraussetzung I steht (III); im übrigen können vorläufig m, n beliebig innerhalb des ursprünglichen Rationalitätsbereichs gewählt werden (vergl. jedoch S. 7 (V) und S. 9).

1) Netto, § 60 p. 66.

2) Es sollen auch im folgenden die im Lauf der Untersuchung sich ergebenden Bedingungen durch römische Ziffern bezeichnet werden.

Es sei 2) $r = 0$, also $M^2 + 3N^2 = 0$; dann gehört $\sqrt{-3}$ zum ursprünglichen Rationalitätsbereich. Da nach I $N \neq 0$ ist, so muss auch $M \neq 0$ sein; hieraus folgt entweder $u = 0$ oder $v = 0$, und die weitere Rechnung zeigt, dass die gesuchte kubische Gleichung die Form

$$(x - a)^3 = 2M$$

erhält, wo also M eine Grösse des $\sqrt{-3}$ enthaltenden Rationalitätsbereichs ist. Wir schliessen diesen Fall von jetzt ab aus, setzen also $M^2 + 3N^2 \neq 0$ voraus (IV).

Demnach hat man jetzt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3a, \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 &= 3\sqrt[3]{(m^2 + 3n^2)\,(m + n\sqrt{-3})}, \\ x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 &= 3\sqrt[3]{(m^2 + 3n^2)\,(m - n\sqrt{-3})}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m+n\sqrt{-3})} + \sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m-n\sqrt{-3})}, \\ x_2 &= a + \omega\sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m+n\sqrt{-3})} + \omega^2\sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m-n\sqrt{-3})}, \\ x_3 &= a + \omega^2\sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m+n\sqrt{-3})} + \omega\sqrt[3]{(m^2+3n^2)(m-n\sqrt{-3})}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Gleichung mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 lautet:

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - m^2 - 3n^2)x - a^3 + (3a - 2m)(m^2 + 3n^2) = 0 \tag{3}$$

oder mit

$$y = x - a, \quad y_i = x_i - a \tag{4}$$

in reducierter Form:

$$y^3 - 3(m^2 + 3n^2)y - 2m(m^2 + 3n^2) = 0. \tag{5}$$

Somit ist $m \neq 0$, da sonst $y = 0$ die Gleichung (5) befriedigte. (V)

Für das Differenzenprodukt findet man:

$$\Pi(x_1 - x_2) = \pm 18N = \pm 18n(m^2 + 3n^2); \tag{6}$$

die Diskriminante Δ ist das Quadrat dieser Zahl; gemäss II und III verschwindet Δ nicht.

Nach einem Satz der Algebra kann jede rationale Funktion einer Wurzel einer irreducibeln Gleichung pten Grads als ganze rationale Funktion $(p-1)$ten Grads dieser Wurzel dargestellt werden. Wenn also (3) oder (5) eine irreducible Abel'sche Gleichung vorstellt, so darf man die Gleichung ansetzen:

$$y_{i+1} = \alpha y_i^2 + \beta y_i + \gamma;$$

die Koefficienten α, β, γ bestimmen sich daraus, dass z. B. für $i = 1$ alle Irrationalitäten herausfallen müssen. Man findet so:

$$\alpha = \frac{1}{2n}, \quad \beta = \frac{m - n}{2n}, \quad \gamma = \frac{m^2 + 3n^2}{n},$$

so dass die gesuchte Beziehung lautet:

$$2n\,y_{i+1} = 2(m^2+3n^2) + (m-n)\,y_i - y_i^2. \qquad (7)$$

Der Bedingung III zufolge wird diese Beziehung nicht illusorisch. Die entsprechende Relation für die x_i wird durch die Gleichung (4) vermittelt.

Wir fragen nun: Ist unter unseren Voraussetzungen (3) oder (5) sicher eine irreducible Abel'sche Gleichung, m. a. W.: sind die aufgestellten Bedingungen nicht nur notwendig sondern auch hinreichend?

Die drei Grössen x_1, x_2, x_3 genügen einer Gleichung mit rationalen Koefficienten; ferner bestehen zwischen je zwei Wurzeln rationale Beziehungen von der Art, wie sie für Abel'sche Gleichungen vorhanden sein müssen, denn man bestätigt leicht, dass die für $i=1$ abgeleitete Relation (7) für jeden Wert von i gilt. Geht man also von der Gleichung (3) oder (5) aus, so sind nur zwei Fälle denkbar: entweder ist die entwickelte Gleichung wirklich eine irreducible Abel'sche, oder sie hat drei rationale, verschiedene Wurzeln, da die Rationalität einer einzigen die aller drei nach sich zieht und $\Delta \neq 0$ ist. (Ohne die rationalen Beziehungen (7) zu Hilfe zu nehmen, kann man die alleinige Möglichkeit dieser beiden Fälle aus der Beschaffenheit des Differenzenprodukts erschliessen: da dasselbe rational und von Null verschieden ist, so besteht die Galois'sche Gruppe von (3) oder (5) entweder aus der identischen Substitution, oder ist sie mit der alternierenden Gruppe identisch, da weder die symmetrische Gruppe 3. Grads, noch eine Gruppe 2. Grads, wie $\{1(12)\}$ das Differenzenprodukt rational macht.)

Dass die beiden denkbaren Fälle auch wirklich eintreten, zeigen wir an Beispielen:

1) Eine irreducible Gleichung erhält man z. B. für $a = 0$, $m = n = 1$; nämlich $x^3 - 12x - 8 = 0$; die Wurzeln sind:

$$x_1 = \sqrt[3]{4(1+i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{4(1-i\sqrt{3})} = 4\cos\frac{\pi}{9} = 3{,}75876,$$

$$x_2 = \omega\sqrt[3]{4(1+i\sqrt{3})} + \omega^2\sqrt[3]{4(1-i\sqrt{3})} = -2\cos\frac{\pi}{9} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} = -3{,}06416,$$

$$x_3 = \omega^2\sqrt[3]{4(1+i\sqrt{8})} + \omega\sqrt[3]{4(1-i\sqrt{3})} = -2\cos\frac{\pi}{9} + 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} = -0{,}69460;$$

die rationalen Beziehungen lauten: $2x_{i+1} = 8 - x_i^2$ für $i = 1, 2, 3$.

2) Setzt man $a = 0$, $m = -\frac{9}{7}$, $n = \frac{10}{21}$, so entsteht die Gleichung: $x^3 - 7x + 6 = 0$ mit den Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; auch hier giebt es eine Beziehung von der Form (7): $20x_{i+1} = 98 - 37x_i - 21x_i^2$ für $i = 1, 2, 3$.

Wenn somit $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m^2 + 3n^2 \neq 0$ ist, so stellt (3) entweder eine irreducible Abel'sche Gleichung oder eine Gleichung mit drei rationalen (verschiedenen) Wurzeln dar. Ob der eine oder andere Fall vorliegt, ist jedesmal durch eine besondere Untersuchung festzustellen.

Für die Aufstellung gewisser biquadratischer Gleichungen ist es von Wert, diejenigen kubischen Abel'schen Gleichungen zu kennen, bei welchen das Produkt der drei Wurzeln eine Quadratzahl h^2 ist. Vermöge (3) hat man:

$$x_1 x_2 x_3 = a^3 - (3a - 2m)(m^2 + 3n^2);$$

setzt man nun

$$a = \alpha h, \quad m = \mu h, \quad n = \nu h, \tag{8}$$

so ergiebt sich

$$h = \frac{1}{\alpha^3 - (3\alpha - 2\mu)(\mu^2 + 3\nu^2)}, \tag{9}$$

womit auch a, m, n bestimmt sind. Es ist also möglich, Gleichungen von der verlangten Eigenschaft (abgesehen von der stets besonders zu prüfenden Irreducibilität) aufzustellen.

Man überzeugt sich leicht, dass es auch im Fall einer allgemeinen kubischen Gleichung möglich ist, Ausdrücke für die Wurzeln derart aufzustellen, dass ihr Produkt ein Quadrat wird; auch hier muss die Irreducibilität besonders geprüft werden.

§ 2. Die Gruppen der irreducibeln biquadratischen Gleichungen.

Die in der Ueberschrift genannten Gruppen müssen transitiv, ihre Ordnung also ein Vielfaches von 4 sein. Man erhält damit folgende Zusammenstellung:

1) Cyklische Gruppe vierter Ordnung C mit den Substitutionen 1 (1 2 3 4), (1 3) (2 4), (1 4 3 2); mit ihr sind zwei andere gleich berechtigt, d. h. durch Transformation [1]) aus ihr ableitbar, die eine aus den Potenzen des Cyklus (1 3 2 4), die andere aus denjenigen des Cyklus (1 2 4 3) bestehend.

2) Die Vierergruppe [2]) G mit den Substitutionen 1, (1 2) (3 4), (1 3) (2 4), (1 4) (2 3); dieselbe ist ausgezeichnet in der symmetrischen Gruppe vierten Grads enthalten, ihre Substitutionen sind alle vertauschbar.

1) Netto § 46, p. 47.

2) Klein, Vorlesungen über das Ikosaëder 1884, p. 12.

Eine dritte Art von transitiven Gruppen der Ordnung $4 = 2^2$ ist nicht möglich; die Gruppe vierter Ordnung 1, (1 3), (2 4), (1 3) (2 4) ist intransitiv [1]).

3) Die Gruppe achter Ordnung H mit den Substitutionen: 1, (1 3), (2 4), (1 3) (2 4), (1 2) (3 4), (1 4) (2 3), (1 2 3 4), (1 4 3 2).

H umfasst also die Substitutionen von C und G, daneben die beiden Transpositionen (1 3) und (2 4); die Substitutionen von H sind nicht vertauschbar. Mit H gleichberechtigt sind zwei andere Gruppen achter Ordnung H′ und H″; eine weitere Gruppe achter Gruppe achter Ordnung aus vier Elementen existiert nicht [2]).

Die Gruppen C, G und H sind sämtlich imprimitiv; jede von ihnen umfasst zwei Systeme der Imprimitivität, deren erstes aus den Elementen x_1, x_3, deren zweites aus den Elementen x_2, x_4 besteht.

4) Die alternierende Gruppe A von der Ordnung 12 besteht aus den Substitutionen der Vierergruppe, sodann aus den 8 Cyklen dritter Ordnung: (1 2 3), (1 2 4), (1 3 2), (1 3 4), (1 4 2), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3). Die alternierende Gruppe ist ausgezeichnet in der symmetrischen enthalten [3]).

5) Die symmetrische Gruppe S von der Ordnung 24 umfasst alle Substitutionen, die aus 4 Elementen sich bilden lassen.

§ 3. Die regulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads.

Mit den Gleichungen, deren Gruppe C ist, hat sich schon Abel [4]) beschäftigt und Ausdrücke für die Wurzeln in einem Brief an Crelle mitgeteilt. Herr Weber [5]) hat dann neuerdings die betreffenden Gleichungen, die als reguläre Abel'sche Gleichungen zu bezeichnen sind, aufgestellt, und wir folgen im wesentlichen seiner Herleitung.

Man geht aus von der Funktion:

$$\varphi = (x_1 - x_3)\ (x_2 - x_4);$$

dieselbe ist jedenfalls von Null verschieden, da sonst eine Doppelwurzel vorhanden wäre; φ bleibt ungeändert für zwei der Substitutionen von

1) Netto § 124, p. 136; Hölder, Annalen Bd. 43, p. 302.

2) Dies folgt aus dem zweiten der Sylow'schen Sätze, Annalen Bd. 5, p. 587; vgl. Netto § 121, p. 121, wo $r = 24$, $p = 2$, $\alpha = 3$ zu setzen ist; dann folgt entweder $i = 3$, $k = 0$, was unmöglich, oder $i = 1$, $k = 1$.

3) Netto § 35, p 34.

4) Oeuvres complètes, I. édition 1839, t. II, p. 253.

5) Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg, Febr. 1892, p. 19 f.

C und ändert für zwei das Zeichen. Bedeutet also a eine von Null verschiedene Rational-, aber keine Quadratzahl (I), so darf man setzen:

$$(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_4) = 4\sqrt{a}. \tag{1}$$

Ferner ist, wenn b rational:

$$(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = 8b; \tag{2}$$

setzt man

$$\psi = (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2,$$

so ist $\frac{\psi}{\varphi}$ unveränderlich für alle Substitutionen von C, also:

$$(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2 = 8c\sqrt{a}. \tag{3}$$

Vermöge (1), (2) und (3) genügen a, b, c der Relation:

$$b^2 = a\,(1 + c^2); \tag{4}$$

man entnimmt hieraus und aus I die Bedingung, dass $1 + c^2$ keine Quadratzahl, also c z. B. nicht $= 0$ sein darf. (II). Dagegen ist es zulässig, dass $1 + c^2 = 0$, also auch $b = 0$ wird; es muss dann i zum Rationalitätsbereich gehören.

Man erhält nun aus (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2\sqrt{b + c\sqrt{a}}, \\ x_2 - x_4 &= 2\sqrt{b - c\sqrt{a}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ferner darf man setzen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_2 + x_4 &= 4m, \\ \chi = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 &= 4r\sqrt{a}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo m und r Rationalzahlen sind, da $\frac{\chi}{\varphi}$ zur Gruppe C gehört. Wir schliessen, um sicher zu gehen, den Fall $r = 0$ aus[1]) und werden ihn nachher gesondert betrachten (III).

Aus (6) folgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2\,(m + r\sqrt{a}), \\ x_2 + x_4 &= 2\,(m - r\sqrt{a}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Kombination von (5) und (7) liefert:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m + r\sqrt{a} + \sqrt{b + c\sqrt{a}}, \\ x_2 &= m - r\sqrt{a} + \sqrt{b - c\sqrt{a}}, \\ x_3 &= m + r\sqrt{a} - \sqrt{b + c\sqrt{a}}, \\ x_4 &= m - r\sqrt{a} - \sqrt{b - c\sqrt{a}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zwischen den drei Irrationalitäten:

$$R = \sqrt{a},\ R_1 = \sqrt{b + c\sqrt{a}},\ R_2 = \sqrt{b - c\sqrt{a}}$$

1) Vgl. die Ueberlegung S 14.

besteht zufolge (4) die Beziehung $R = R_1 R_2$, so dass durch das Vorzeichen von zweien das der dritten bestimmt ist. Man hat daher folgende Uebersicht der Vertauschungen:

R	R_1	R_2	Reihenfolge	Substitution
$+ R$	$+ R_1$	$+ R_2$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	1
$- R$	$+ R_2$	$- R_1$	$x_2 x_3 x_4 x_1$	(1 2 3 4)
$+ R$	$- R_1$	$- R_2$	$x_3 x_4 x_1 x_2$	(1 3) (2 4)
$- R$	$- R_2$	$+ R_1$	$x_4 x_1 x_2 x_3$	(1 4 3 2)

Die Bedeutung der zweiten Horizontalreihe ist z. B.: ändert man das Vorzeichen von R, so geht jedenfalls R_1 in $+ R_2$ über; wir lassen nun R_1 in $+ R_2$ übergehen, dann geht R_2 notwendig in $- R_2$ über; dabei wird die Reihenfolge der Wurzeln aus x_1, x_2, x_3, x_4 in x_2, x_3, x_4, x_1 umgewandelt, was der Substitution (1 2 3 4) entspricht.

Setzt man $$x - m = y, \quad x_i - m = y_i, \tag{9}$$ so genügen die y_i der Gleichung:

$$y^4 - 2(ar^2 + b)y^2 - 4acry + r^4 - 2abr^2 + a = 0^1), \tag{10}$$

wobei die Relation (4) nicht ausser acht zu lassen ist.

Es ist nicht schwer, den Gleichungen (8) die Form zu geben, in der sie bei Abel auftreten; nur ist für die Gleichungen (11) bis (13) der Fall $1 + c^2 = 0$ auszuschliessen. Unter dieser Einschränkung folgt nämlich aus (4):

$$b = h_0(1 + c^2), \quad a = h_0{}^2(1 + c^2), \tag{11}$$

wo h_0 rational, ebenso wie die in den folgenden Gleichungen:

$$c = \frac{1}{e}, \quad \frac{r}{e} = r_1, \quad \frac{h_0}{e^2} = h, \quad r_1 h_0 = k \tag{12}$$

neu eingeführten Grössen. Nach II ist $c \neq 0$, so dass e einen endlichen Wert behält. Es wird nun:

$$x_1 = m + k\sqrt{1 + e^2} + \sqrt{h(1 + e^2 + \sqrt{1 + e^2})}, \tag{13}$$

ein Ausdruck, der sich von dem Abel'schen nur in der Bezeichnung unterscheidet.

Zur Aufstellung der rationalen Beziehungen zwischen den Gleichungswurzeln gehen wir auf (10) zurück, setzen also die Summe der Wurzeln gleich Null voraus. Wir wenden wieder den auf S. 7 benützten Satz an, demzufolge man annehmen darf:

$$y_{i+1} = \alpha y_i{}^3 + \beta y_i{}^2 + \gamma y_i + \delta. \tag{14}$$

Zur Bestimmung von α, β, γ, δ kann man $i = 1$ setzen, es müssen dann die auftretenden Irrationalitäten

1) Die Formel von Herrn Weber enthält hier einige kleine Irrtümer.

$$\sqrt{a},\ \sqrt{b + c\sqrt{a}},\ \sqrt{b - c\sqrt{a}},\ \sqrt{ab + ac\sqrt{a}}$$

sämtlich herausfallen, wobei noch die Relation (4) zu beachten ist. Man erhält, wenn

$$N = (2ar^2 - b)^2 - a \tag{15}$$

gesetzt wird, wo N als Differenz einer quadratischen und einer nach I nicht quadratischen Zahl sicher von Null verschieden ist:

$$\left.\begin{aligned} N\alpha &= 2ar^2(1 - c) + bc, \\ N\beta &= ar[2(br^2 - 1) - c(c + 1)], \\ N\gamma &= ar^2[2ar^2(c - 3) + b(3c - 2)] - ac(1 + 2c^2), \\ N\delta &= ar[5acr^2(c - 1) - 2abr^4 - b(2c^2 - c - 2)]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass der Grad der rationalen Funktion (14) unter Umständen sich erniedrigt.

Denkt man sich (14) für alle Werte von i geschrieben und α, β, γ, δ durch Determinanten berechnet, so folgt aus einer fundamentalen Eigenschaft der letzteren, dass N bis auf einen Faktor mit dem Differenzenprodukt $\Pi(x_1 - x_2)$ übereinstimmen muss; in der That ist $\Pi(x_1 - x_2) = \pm 16N\sqrt{a}$, wie vorauszusehen war, da $\dfrac{\Pi(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}$ für die Substitutionen von C sich nicht ändert. $\Pi(x_1 - x_2)$ ist also hier nicht rational.

Wir stellen noch einmal die Voraussetzungen zusammen, unter denen die bisherigen Entwicklungen[1]) bestehen:

I. a weder Null noch eine Quadratzahl,

II. $1 + c^2$ keine Quadratzahl,

III. $r \neq 0$.

Es fragt sich nun wiederum, ob diese Bedingungen zusammen mit (10) eine irreducible reguläre Abel'sche Gleichung liefern. Zunächst kann man konstatieren, dass bei den obigen Voraussetzungen die für $i = 1$ abgeleiteten Relationen (14) bis (16) für jeden Wert von i bestehen. Sodann zeigen wir, dass (10) keinen rationalen Linearfaktor enthalten kann; denn sonst müssten wegen der rationalen Darstellbarkeit alle Wurzeln, also auch das Differenzenprodukt rational sein. Enthielte ferner (10) einen rationalen, irreducibeln quadratischen Faktor, so müssten wegen der rationalen Darstellbarkeit die vier Wurzeln von der Form: $a + \sqrt{m}$, $b + k\sqrt{m}$ sein; aber auch dann wäre das Differenzenprodukt rational.

Es ist noch der Fall $r = 0$ zu erledigen, da die Bedingung III zunächst nur aus Gründen der Uebersichtlichkeit hinzugefügt wurde.

1) Von den Gleichungen (11) bis (13) wird kein weiterer Gebrauch gemacht.

Geht man die Reihe unserer Schlüsse unter der Annahme $r = 0$ durch, so zeigt sich, dass dieselben ohne Ausnahme bestehen bleiben. Die Bedingung III ist also entbehrlich und man hat das Resultat:

Formel (10) liefert alle irreducibeln, regulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads und nur solche, wenn a, b, c der Relation (4) genügen, a und $1 + c^2$ keine Quadratzahlen sind und ausserdem a von Null verschieden ist.

§ 4. Die irregulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads.

Die Gleichungen mit der Gruppe G sind Abel'sche, da die Substitutionen von G untereinander vertauschbar sind [1]); man kann diese Gleichungen als irreguläre Abel'sche Gleichungen bezeichnen.

Für ihre Bestimmung bilde die Grundlage die Funktion $\varphi = x_1 + x_3 - x_2 - x_4$. Nach den Grundbegriffen der Anwendung der Gruppentheorie auf Gleichungen bleibt φ^2 numerisch [2]) ungeändert für sämtliche Substitutionen von G, während φ seinen Zahlenwert für einzelne der Substitutionen von G ändert.

Setzt man also:

$$\varphi = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = 4\sqrt{p} \qquad (1)$$

und sind die Funktionen $x_1 + x_3 - x_2 - x_4$ und $x_2 + x_4 - x_1 - x_3$ numerisch verschieden, so folgt, dass $\sqrt{p}$ nicht rational, also p keine Quadratzahl sein darf (I). Ist aber $x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = x_2 + x_4 - x_1 - x_3$; d. h. $\varphi = 0$, oder $p = 0$, so ist dieser Schluss nicht mehr anwendbar, wir setzen daher zunächst $p \neq 0$ voraus und kommen später auf die Möglichkeit dieses Falles zurück (II).

Entsprechend (1) kann gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4\sqrt{q}, \\ \chi &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4\sqrt{n}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wo für q und n die für p aufgestellten Bedingungen I und II gelten. Nun ist aber $\varphi . \psi . \chi$ eine Grösse des Rationalitätsbereichs, also hat man:

$$\sqrt{n} = r . \sqrt{p} . \sqrt{q},$$

wo r eine Rationalzahl ist. Da p, q und n nicht verschwinden (II), so ist auch $r \neq 0$; ferner darf das Produkt (oder Verhältnis) von p und q keine Quadratzahl sein, da sonst $\sqrt{n}$ rational würde (III); aus diesem Grund muss auch $p \neq q$ sein.

---

1) Netto § 180, p. 206.

2) Hölder, Annalen Bd. 34, p. 40.

Man hat also:

$$\chi = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4r\sqrt{p}\,\sqrt{q}; \tag{3}$$

nimmt man dazu noch die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4m, \tag{4}$$

so folgt aus den Gleichungen (1) bis (4) [1]:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m + \sqrt{p} + \sqrt{q} + r\sqrt{p}\,.\,\sqrt{q},\\ x_2 &= m + \sqrt{p} - \sqrt{q} - r\sqrt{p}\,.\,\sqrt{q},\\ x_3 &= m - \sqrt{p} - \sqrt{q} + r\sqrt{p}\,.\,\sqrt{q},\\ x_4 &= m - \sqrt{p} + \sqrt{q} - r\sqrt{p}\,.\,\sqrt{q}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man $x - m = y,\ x_i - m = y_i,$ (6)

so wird die Gleichung für die y_i:

$$y^4 - 2(p + q + r^2pq)y^2 - 8rpqy + (p - q)^2 + r^2pq(r^2pq - 2p - 2q) = 0. \tag{7}$$

Wie die Vorzeichenänderungen der beiden Radikale $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ den Substitutionen von G entsprechen, zeigt die nachstehende Tabelle:

$\sqrt{p}$	$\sqrt{q}$	Reihenfolge	Substitution
$+\sqrt{p}$	$+\sqrt{q}$	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	1
$+\sqrt{p}$	$-\sqrt{q}$	$x_2\ x_1\ x_4\ x_3$	(1 2) (3 4)
$-\sqrt{p}$	$-\sqrt{q}$	$x_3\ x_4\ x_1\ x_2$	(1 3) (2 4)
$-\sqrt{p}$	$+\sqrt{q}$	$x_4\ x_3\ x_2\ x_1$	(1 4) (2 3)

Es ist noch ein Ausnahmefall zu erörtern. Von den drei Grössen p, q, n kann höchstens eine, gleichgültig welche, z. B. n, den Wert 0 haben, da sonst die Gleichung (7) mehrfache Wurzeln besitzt. Daraus folgt dann, dass in (3) r = 0 zu setzen ist, und es besteht auch im folgenden kein Hindernis, dass dieser Fall stattfinden könnte. Die Voraussetzung II fällt also von jetzt ab, soweit sie die Grösse n betrifft, fort.

Wir bestimmen nun die rationalen Beziehungen zwischen den Gleichungswurzeln. Bezeichnet Θ eine rationale Funktion, so kann man setzen: $y_2 = \Theta(y_1)$; (8)

da (1 2) (3 4) eine Substitution von G ist, so folgt, dass man auch hat $y_1 = \Theta(y_2)$, also $\Theta^2(y_2) = y_2$, wenn Θ als Operationszeichen gedeutet wird. Da ferner (1 3) (2 4) eine Substitution von G ist, so hat man auch:

$$y_4 = \Theta(y_3),\ y_3 = \Theta(y_4),\ \Theta^2(y_4) = y_4. \tag{9}$$

(Die Substitution (1 4) (2 3) liefert nichts neues).

1) Vergl. Weber, Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg, März 1892, p. 62.

Man kann für die Funktion Θ die Form einer linearen Substitution voraussetzen und findet:

$$y_2 = -\frac{r^2pq - p + q + rqy_1}{rq + y_1}. \tag{10}$$

Die Substitution (10) gehört zur Klasse der umkehrbaren; ihre Determinante ist $(p - q)(r^2q - 1)$, also nach unseren Voraussetzungen von Null verschieden.

Bezeichnet Θ' eine andere lineare Substitution, so muss das Gleichungssystem bestehen:

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \Theta'(y_2),\ y_2 = \Theta'(y_3),\ \Theta'^2(y_3) = y_3; \\ y_1 &= \Theta'(y_4),\ y_4 = \Theta'(y_1),\ \Theta'^2(y_1) = y_1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Allgemein hat man für jeden Wert von i:

$$\Theta^2(y_i) = y_i,\ \Theta'^2(y_i) = y_i. \tag{12}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$y_3 = -\frac{r^2pq + p - q + rpy_2}{rp + y_2}, \tag{13}$$

also eine umkehrbare Substitution mit der von Null verschiedenen Determinante $(p - q)(r^2p - 1)$.

Die eben entwickelten Beziehungen erlauben die Darstellung der Wurzeln in der von Kronecker [1]) angegebenen Weise: nimmt man y_1 als Funktionsargument, deutet Θ und Θ' als Operationszeichen und setzt für α und β je die Zahlen 1 oder 2, so wird durch das Symbol $\Theta^\alpha\Theta'^\beta$ jede Wurzel einmal und nur einmal dargestellt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} &y_1, \text{ wenn } \alpha = 2,\ \beta = 2, \\ &y_2, \quad \text{„} \quad \alpha = 1,\ \beta = 2, \\ &y_3, \quad \text{„} \quad \alpha = 1,\ \beta = 1, \\ &y_4, \quad \text{„} \quad \alpha = 2,\ \beta = 1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Man bestätigt leicht nachträglich durch Ausrechnung die Existenz dieser Relationen unter den bestehenden Voraussetzungen.

Das Differenzenprodukt hat den Wert:

$$\Pi(x_1 - x_2) = \pm 2^6pq(p - q)(r^2p - 1)(r^2q - 1).$$

$\Pi(x_1 - x_2)$ ist also hier rational und nach den aufgestellten Bedingungen von Null verschieden.

Wir untersuchen noch, ob die aufgestellten Bedingungen auch hinreichend sind.

Zufolge (1 4) hätte die Rationalität einer Wurzel die der üb-

1) Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, p. 881.

rigen zur Folge; dann könnte aber z. B. $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ nicht eine irrationale Quadratwurzel aus einer Grösse des Rationalitätsbereichs sein. (Der Fall $r = 0$ oder $n = 0$ ist hiebei inbegriffen, da höchstens eine der drei Funktionen φ, ψ, χ verschwinden darf.)

Wäre die biquadratische Gleichung in zwei rationale irreducible quadratische Faktoren zerlegbar, so müsste dieselbe (wegen der Rationalität des Differenzenprodukts) Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{m}$, $b \pm k\sqrt{m}$ mit derselben Irrationalität haben. Dann müssten aber zwei Paare der Wurzeln (5) rationale Summen liefern, was, wie man leicht sieht, bei unseren Festsetzungen unmöglich ist. Eine Ausnahme bildet der Fall $r = 0$; hier zeigt aber der unmittelbare Anblick der Gleichung (5), dass nicht bloss eine quadratische Irrationalität auftritt, da ja $\sqrt{p}$ und $\sqrt{q}$ nicht in rationalem Verhältnis stehen (III).

Wenn also p und q weder Null noch Quadratzahlen sind, wenn ferner p.q keine Quadratzahl ist, so stellt (7) stets eine irreguläre Abel'sche Gleichung dar.

§ 5. Die biquadratischen Gleichungen mit einer Gruppe achter Ordnung.

Bei der Aufstellung der Gleichungen mit der Gruppe H (§ 2) folgen wir dem in § 3 eingeschlagenen Weg.

Die Funktion $\varphi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$ bleibt ungeändert für die zu G gehörigen Substitutionen von H und wechselt für die übrigen das Zeichen. Ist also a eine rationale, aber keine Quadratzahl, ferner von Null verschieden, da sonst eine Doppelwurzel auftritt (I), so darf man setzen: $$\varphi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = 4\sqrt{a}. \qquad (1)$$

Die Funktion $$(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = 8c \qquad (2)$$ ist auch hier rational; dagegen bleibt die Funktion

$$\psi = (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2$$

ungeändert für die Gruppe mit den Substitutionen 1, (1 3), (2 4), (1 3) (2 4), während sie für die übrigen Substitutionen von H das Zeichen wechselt. Hier ist also, im Unterschied von den regulären Abel'schen Gleichungen, ψ nicht rational in φ ausdrückbar; man hat somit, wenn c keine Quadratzahl (II) (der Fall $c = 0$ wird sogleich besprochen werden) und auch $\frac{c}{a}$ kein Quadrat ist (III):

$$(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2 = 8\sqrt{c}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$x_1 - x_3 = 2\sqrt{b + \sqrt{c}},$$
$$x_2 - x_4 = 2\sqrt{b - \sqrt{c}}, \tag{4}$$

wobei noch die Beziehung $a = b^2 - c$ besteht. (5)

Wäre $c = 0$, so wäre a eine Quadratzahl, im Widerspruch zu I, ausser wenn auch $b = 0$ wäre, dann hätte man aber auch $a = 0$, also mehrfache Wurzeln (I); somit ist $c \neq 0$ (IV). Die Bedingungen I und III lauten nun: Weder $b^2 - c$ (I) noch $\frac{b^2}{c} - 1$ (III) darf ein Quadrat sein; $b^2 - c = 0$ ist durch II ausgeschlossen.

Die Funktion $\chi = x_1 + x_3 - x_2 - x_4$ verhält sich H gegenüber wie ψ, der Quotient $\frac{\chi}{\psi}$ ist rational; sind demnach m, r rationale Zahlen — man überzeugt sich durch ähnliche Ueberlegungen wie in § 3, dass auch $r = 0$ zulässig ist — so hat man:

$$x_1 + x_3 = 2(m + r\sqrt{c}),$$
$$x_2 + x_4 = 2(m - r\sqrt{c}). \tag{7}$$

Aus (4) und (7) folgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m + r\sqrt{c} + \sqrt{b + \sqrt{c}}, \\ x_2 &= m - r\sqrt{c} + \sqrt{b - \sqrt{c}}, \\ x_3 &= m + r\sqrt{c} - \sqrt{b + \sqrt{c}}, \\ x_4 &= m - r\sqrt{c} - \sqrt{b - \sqrt{c}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Setzt man $R = \sqrt{c}$, $R_1 = \sqrt{b + \sqrt{c}}$, $R_2 = \sqrt{b - \sqrt{c}}$, so folgt nach (5): $R_1 R_2 = \sqrt{b^2 - c} = \sqrt{a}$. Da nun das Vorzeichen von $\sqrt{a}$ vollständig unabhängig ist von demjenigen von $\sqrt{c}$, so sind zwischen den Radikalen R, R_1 R_2 alle überhaupt möglichen Zeichenwechsel statthaft; deren Anzahl ist gleich der Zahl der Variationen von zwei Elementen zur dritten Klasse, also $= 2^3 = 8$.

Wir geben auch hier wieder eine Uebersicht der Vertauschungen zwischen den Wurzeln:

R	R_1	R_2	Reihenfolge	Substitution
+ R	+ R_1	+ R_2	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	1
+ R	+ R_1	— R_2	$x_1\ x_4\ x_3\ x_2$	(2 4)
— R	+ R_2	+ R_1	$x_2\ x_1\ x_4\ x_3$	(1 2) (3 4)
— R	+ R_2	— R_1	$x_2\ x_3\ x_4\ x_1$	(1 2 3 4)
+ R	— R_1	+ R_2	$x_3\ x_2\ x_1\ x_4$	(1 3)
+ R	— R_1	— R_2	$x_3\ x_4\ x_1\ x_2$	(1 3) (2 4)
— R	— R_2	+ R_1	$x_4\ x_1\ x_2\ x_3$	(1 4 3 2)
— R	— R_2	— R_1	$x_4\ x_3\ x_2\ x_1$	(1 4) (2 3).

Wenn $$x - m = y, \quad x_i - m = y_i \tag{9}$$
gesetzt wird, so genügen die y_i der Gleichung:
$$y^4 - 2(r^2c + b)y^2 - 4rcy + (r^2c - b)^2 - c = 0. \tag{10}$$
Aus den Eigenschaften von H und dem Satz S. 7 folgt, dass eine ganze rationale Funktion dritten Grads Θ sich finden lassen muss, derart dass: $y_3 = \Theta(y_1)$, $y_4 = \Theta(y_2)$, $y_1 = \Theta(y_3)$, $y_2 = \Theta(y_4)$, allgemein
$$y_{i+2} = \Theta(y_i), \quad \Theta^2(y_i) = y_i) \tag{11}$$
wird. Für die Annahme:
$$y_{i+2} = \alpha y_i^3 + \beta y_i^2 + \gamma y_i + \delta \tag{12}$$
erhält man, wenn z. B. $i = 1$ gesetzt wird, mit der Abkürzung:
$$N = 4r^2(r^2c - b) + 1 \tag{13}$$
die Werte:
$$\left.\begin{aligned} N\alpha = -4r^2, \quad N\beta = 2r, \quad N\gamma = 8r^2(r^2c + b) - 1, \\ N\delta = 2r(5r^2c - b). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$
$N = 0$ würde bedeuten: $r^2 = \frac{b \pm \sqrt{a}}{2c}$, was unmöglich ist; für das Differenzenprodukt findet man: $\Pi(x_1 - x_2) = \pm 16cN\sqrt{a}$; nach I und dem eben Gesagten verschwindet also das Differenzenprodukt nicht.

Eine andere Art der Darstellung der rationalen Beziehungen zwischen den Wurzeln ist (vergl. S. 16): $y_3 = -\frac{y_1 - 2r(r^2c - b)}{2ry_1 + 1}$ mit den analogen aus (11) zu entnehmenden Beziehungen.

Es ist noch die Frage zu beantworten, ob man notwendig eine Gleichung mit der Gruppe H bekommt, wenn b und c den aufgestellten Bedingungen genügen; dabei sehen wir zunächst vom Fall $r = 0$ ab.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Relationen (12) bis (14) unter unseren Voraussetzungen für jeden Wert von i (nicht nur für $i = 1$) gelten. Hätte also (10) eine rationale Wurzel, so müsste wegen der Relationen (12) bis (14) noch eine zweite rationale Wurzel vorhanden sein; dann wäre auch die Summe von zweien der vier Wurzeln rational; man sieht leicht, dass dies unseren Voraussetzungen widerspricht. Aus demselben Grund kann (10) nicht in zwei rationale quadratische Faktoren zerfallen; die Wurzeln müssten in diesem Fall zwei verschiedene quadratische Irrationalitäten enthalten, da $\Pi(x_1 - x_2)$ irrational ist. Da (10) durch Quadratwurzeln auflösbar und $\Pi(x_1 - x_2)$ irrational ist, so könnte die Gruppe von (10) nur noch C sein; dann wäre aber
$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_4} - \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b^2 - c}}$$
rational, entgegen der Voraussetzung III.

Die obigen Schlüsse versagen zum Teil im Fall $r = 0$; indessen zeigt man leicht, dass die Resultate auch in diesem Fall gelten; man hat nur statt der Summe zweier Wurzeln ihr Produkt zu nehmen.

Somit stellt (10) alle biquadratischen Gleichungen mit der Gruppe H und nur diese dar, wenn keine von den drei Grössen c, $b^2 - c$, $\frac{b^2}{c} - 1$ Null oder eine Quadratzahl ist.

Die Imprimitivität der Gruppen C, G und H (§ 2) hat für die entsprechenden Gleichungen die Folge [1]), dass jede derselben durch Elimination einer Zwischengrösse λ aus zwei irreducibeln quadratischen Gleichungen herleitbar ist; es sind demzufolge die genannten drei Klassen von biquadratischen Gleichungen durch Quadratwurzeln auflösbar (ihre kubische Resolvente hat eine rationale Wurzel).

Für die einzelnen Fälle ergiebt sich:

1) Die Gleichungen mit der Gruppe C [§ 3 (10)] entstehen durch Elimination von λ aus:

$$(y - r\lambda)^2 = b + c\lambda \text{ und } \lambda^2 = a = \frac{b^2}{1 + c^2}. \qquad (15)$$

2) Aehnlich erhält man die Gleichungen mit der Gruppe G [§ 4 (7)] durch Elimination von λ zwischen:

$$(y - r\lambda)^2 = p + q + 2\lambda \text{ und } \lambda^2 = pq. \qquad (16)$$

3) Endlich sind die Gleichungen mit der Gruppe H [§ 5 (10)] das Resultat der Elimination von λ zwischen:

$$(y - r\lambda)^2 = b + \lambda \text{ und } \lambda^2 = c. \qquad (17)$$

Damit ist die Aufzählung der durch Quadratwurzeln lösbaren irreducibeln biquadratischen Gleichungen erschöpft; denn die Ordnung der Gruppe einer derartigen Gleichung muss von der Form 2^μ sein [2]).

Setzt man einen reellen Rationalitätsbereich voraus, so besteht hinsichtlich der Realität der Wurzeln ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Abel'schen Gleichungen und denjenigen mit der Gruppe H. Bei jenen nämlich zieht die Realität einer einzigen Wurzel die aller übrigen nach sich, bei diesen notwendig nur die einer zweiten. Es wird später von dieser Bemerkung Gebrauch gemacht werden.

---

1) Netto § 222, p. 260.

2) Sylow, Annalen 1872, Bd. V, p. 587.

§ 6. Die biquadratischen Gleichungen mit alternierender und symmetrischer Gruppe.

Um die biquadratischen Gleichungen mit alternierender Gruppe A zu bilden, bedienen wir uns der kubischen Resolvente mit den Wurzeln:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 16\,u = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2,\\ \xi_2 &= 16\,v = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,\\ \xi_3 &= 16w = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Die Resolvente ist in unserem Fall eine kubische Abel'sche Gleichung; denn die Substitutionen von A bewirken entweder keine Aenderung oder eine cyklische Vertauschung von ξ_1, ξ_2, ξ_3. (Die ξ_i sind numerisch verschieden, da sonst auch unter den x_i gleiche Werte vorkämen; dann würde auch die Gruppe der aufzustellenden Gleichung nicht A sein können.) Ferner ist zu beachten, dass das Produkt von ξ_1, ξ_2, ξ_3 (u, v, w) das Quadrat einer Grösse des Rationalitätsbereichs ist; aus § 1 S. 9 ist bekannt, dass diese Bedingung erfüllbar ist, nur hat man die Irreducibilität besonders zu prüfen. Man hat also, wenn h eine Rationalzahl ist,

$$\sqrt{u}\,.\,\sqrt{v}\,.\,\sqrt{w} = h \tag{2}$$

und schliesst daraus, dass für die drei Radikale $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ das Vorzeichen von zweien dasjenige des dritten bestimmt.

Setzt man noch, unter s eine Rationalzahl verstanden,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4s, \tag{3}$$

so folgen aus (1) und (3) die bekannten Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= s + \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w},\quad x_2 = s - \sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w},\\ x_3 &= s + \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w},\quad x_4 = s - \sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wird

$$y = x - s,\quad y_i = x_i - s \tag{5}$$

gesetzt, so genügen die y_i der Gleichung:

$$\begin{aligned} y^4 - 2(u + v + w)y^2 - 8\,.\,\sqrt{u}\,.\,\sqrt{v}\,.\,\sqrt{w}\;y + u^2 + v^2 + w^2\\ - 2(uv + uw + vw) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Sind in (2) § 1 a, m, n gemäss (8) und (9) § 1 bestimmt, so darf man für u, v, w die dort für x_1, x_2, x_3 gegebenen Werte setzen und erhält statt (6):

$$y^4 - 6ay^2 + 8hy + 12(m^2 + 3n^2) - 3a^2 = 0. \tag{6a}$$

Das Differenzenprodukt hat den Wert:

$$\Pi(x_1 - x_2) = +2^6\,(u - v)\,(u - w)\,(v - w),$$

stimmt also bis auf einen Zahlenfaktor mit dem der Resolvente überein und ist wie dieses rational. — Es folgt noch eine Uebersicht der Vertauschungen zwischen den x_i.

$\sqrt{u}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{w}$	Reihenfolge	Substitution
$+\sqrt{u}$	$+\sqrt{v}$	$+\sqrt{w}$	$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	(1)
$+\sqrt{w}$	$+\sqrt{u}$	$+\sqrt{v}$	$x_1\,x_3\,x_4\,x_2$	(2 3 4)
$+\sqrt{v}$	$+\sqrt{w}$	$+\sqrt{u}$	$x_1\,x_4\,x_2\,x_3$	(2 4 3)
$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{v}$	$+\sqrt{w}$	$x_2\,x_1\,x_4\,x_3$	(1 2) (3 4)
$+\sqrt{v}$	$-\sqrt{w}$	$-\sqrt{u}$	$x_2\,x_3\,x_1\,x_4$	(1 2 3)
$-\sqrt{w}$	$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{v}$	$x_2\,x_4\,x_3\,x_1$	(1 2 4)
$-\sqrt{w}$	$+\sqrt{u}$	$-\sqrt{v}$	$x_3\,x_1\,x_2\,x_4$	(1 3 2)
$-\sqrt{v}$	$-\sqrt{w}$	$+\sqrt{u}$	$x_3\,x_2\,x_4\,x_1$	(1 3 4)
$+\sqrt{u}$	$-\sqrt{v}$	$-\sqrt{w}$	$x_3\,x_4\,x_1\,x_2$	(1 3) (2 4)
$-\sqrt{v}$	$+\sqrt{w}$	$-\sqrt{u}$	$x_4\,x_1\,x_3\,x_2$	(1 4 2)
$+\sqrt{w}$	$-\sqrt{u}$	$-\sqrt{v}$	$x_4\,x_2\,x_1\,x_3$	(1 4 3)
$-\sqrt{u}$	$-\sqrt{v}$	$+\sqrt{w}$	$x_4\,x_3\,x_2\,x_1$	(1 4) (2 3).

Zur Darstellung der rationalen Beziehungen zwischen den x_i oder y_i schreitend, erkennen wir aus den Eigenschaften von A die Darstellbarkeit einer Wurzel durch eine nicht symmetrische rationale Funktion von zwei andern. Denn für $R(x_1, x_3)$ als eine solche Funktion bleibt sowohl diese selbst als etwa x_2 nur ungeändert bei Anwendung der identischen Substitution, bei allen übrigen Substitutionen von A ändern sich $R(x_1, x_3)$ und x_2. Es erscheint indessen zweckmässig, die Rechnung so zu führen, dass man der Gleichung:

$$y_2 + y_4 = -(y_1 + y_3) \tag{7}$$

die zweite zur Seite stellt:

$$y_2 - y_4 = \Theta(y_1, y_3). \tag{8}$$

Da (1 3) (2 4) eine Substitution von A ist, so wechselt die rationale Funktion Θ ihr Zeichen bei einer Vertauschung von y_1 mit y_3. Ferner braucht man (S. 7) von y_1 und y_3 keine höhere als die dritte Potenz in Rechnung zu ziehen, und aus diesen beiden Erwägungen folgt, dass man statt (8) schreiben kann:

$$\frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_3} = \alpha y_1^{\,2} y_3^{\,2} + \beta y_1 y_3 (y_1 + y_3) + \gamma (y_1 + y_3)^2 + \delta y_1 y_3 + \varepsilon (y_1 y_3) + \zeta. \tag{9}$$

Durch die Substitution (1 2) (3 4) leitet man aus (9) ab:

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_4} = \alpha y_2^{\,2} y_4^{\,2} + \beta y_2 y_4 (y_2 + y_4) + \gamma (y_2 + y_4)^2 + \delta y_2 y_4 + \varepsilon (y_2 + y_4) + \zeta. \tag{10}$$

Addition von (9) und (10) liefert mit Rücksicht auf (2) und (4):

$$\frac{v+w}{v-w} = \alpha\Big[(u-v-w^2)+4vw\Big] - 4\beta h + 4\gamma u + \delta(u-v-w) + \zeta. \quad (11)$$

Subtrahiert man (10) von (9), führt die Werte der y_i ein und multipliziert beide Seiten der entstehenden Gleichung mit $\sqrt{u}$, so kommt:

$$\frac{h}{v-w} = -2\alpha h(u-v-w) + \beta u(u-v-w) - \delta h + \varepsilon u. \quad (12)$$

In den Gleichungen (11) und (12) treten nun u, v, w selbst, nicht mehr die Quadratwurzeln aus diesen Grössen auf. Wenn man wiederum voraussetzt, dass in den Gleichungen (2) des § 1 a, m, n zufolge den Bedingungen (8) und (9) § 1 bestimmt seien, so darf man auch in den obigen Gleichungen (11) und (12) für u, v, w die in § 1 für x_1, x_2, x_3 gegebenen Worte setzen. Nach einiger Rechnung erhält man, wenn überall Reelles und Imaginäres getrennt wird, für die unbekannten Koeffizienten die sechs linearen Gleichungen: ($r = m^2 + 3n^2$, wie in § 1):

$$\left.\begin{aligned}
24rn\alpha + a &= 0,\\
(5a^2 + 8am - 4r)\alpha - 4h\beta + 4(a-m)\gamma + (a-2m)\delta + \zeta &= 0,\\
8a\alpha - 4\gamma - 2\delta &= -\frac{1}{3n},\\
12rn\beta - h &= 0,\\
4h\alpha - a\beta - \varepsilon &= 0,\\
2h(a+2m)\alpha + (2r - am - a^2)\beta - h\delta - (a-m)\varepsilon &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Man erhält hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{a}{24rn}, \quad \beta = \frac{h}{12rn}, \quad \gamma = -\frac{a(a-2m)}{8rn},\\
\delta &= \frac{a^2-6am+2r}{12rn}, \quad \varepsilon = -\frac{\alpha h}{4rn}, \quad \zeta = \frac{15a^3-12a^2m-8ar+8h^2+8rm}{24rn}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Nenner dieser Brüche sind bis auf numerische Koeffizienten mit dem Differenzenprodukt identisch (vergl. S. 6 und S. 21), verschwinden also nicht.

Trägt man die Worte (14) in (9) ein, so erhält man die gesuchte Beziehung (8): $y_2 - y_4 = \Theta(y_1, y_3)$, die in Verbindung mit (7) y_2 und y_4 als rationale Funktionen von y_1 und y_3 darstellt. Auf die Gleichung (8) sind die Substitutionen von A anwendbar, so dass man analoge Ausdrücke für die fünf übrigen Wurzeldifferenzen erhält.

Es ist leicht zu zeigen, dass die aufgestellte Bedingung „u, v, w müssen einer irreducibeln kubischen Abel'schen Gleichung (mit $uvw = h^2$) genügen" hinreichend ist. Denn unter dieser Voraussetzung hat 1) die Resolvente keine rationale Wurzel, die Gleichung (8) ist also nicht durch Quadratwurzeln auflösbar (S. 20), und da 2) das

Differenzenprodukt rational ist (S. 21), so kann die Gruppe von (8) nur die alternierende sein.

Von den Gleichungen mit der Gruppe A geht man leicht zu denjenigen mit symmetrischer Gruppe S über; man hat nur die Voraussetzung über u, v, w dahin abzuändern, dass u, v, w einer allgemeinen irreducibeln kubischen Gleichung genügen sollen, die Bedingung $\sqrt{u} \cdot \sqrt{v} \cdot \sqrt{w} = h$ bleibt bestehen. Zwischen u, v, w sind jetzt alle Vertauschungen, nicht nur cyklische, zulässig; zu den auf S. 22 zusammengestellten Substitutionen treten daher noch die folgenden:

$\sqrt{u}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{w}$	Reihenfolge	Substitution
$+\sqrt{w}$	$+\sqrt{v}$	$+\sqrt{u}$	$x_1 x_2 x_4 x_3$	(3 4)
$+\sqrt{v}$	$+\sqrt{u}$	$+\sqrt{w}$	$x_1 x_3 x_2 x_4$	(2 3)
$+\sqrt{u}$	$+\sqrt{w}$	$+\sqrt{v}$	$x_1 x_4 x_2 x_3$	(2 4)
$-\sqrt{w}$	$+\sqrt{v}$	$-\sqrt{u}$	$x_2 x_1 x_3 x_4$	(1 2)
$-\sqrt{u}$	$-\sqrt{w}$	$+\sqrt{v}$	$x_2 x_3 x_4 x_1$	(1 2 3 4)
$+\sqrt{v}$	$-\sqrt{u}$	$-\sqrt{w}$	$x_2 x_4 x_1 x_3$	(1 2 4 3)
$-\sqrt{v}$	$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{w}$	$x_3 x_1 x_4 x_2$	(1 3 4 2)
$+\sqrt{u}$	$-\sqrt{w}$	$-\sqrt{v}$	$x_3 x_2 x_1 x_4$	(1 3)
$-\sqrt{w}$	$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{u}$	$x_3 x_4 x_2 x_1$	(1 3 2 4)
$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{w}$	$-\sqrt{v}$	$x_4 x_1 x_2 x_3$	(1 4 3 2)
$-\sqrt{u}$	$-\sqrt{u}$	$+\sqrt{w}$	$x_4 x_2 x_3 x_1$	(1 4)
$+\sqrt{w}$	$-\sqrt{v}$	$-\sqrt{u}$	$x_4 x_3 x_1 x_2$	(1 4 2 3).

Die Ausdrücke für die x_i und die Gleichung, der die y_i genügen, stimmen mit (4) und (6) überein; dagegen ist es hier nicht möglich, eine Wurzel in zwei anderen rational auszudrücken.

Der Beweis dafür, dass die Bedingung „u, v, w müssen einer irreducibeln kubischen Gleichung mit symmetrischer Gruppe genügen“ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, wird ganz analog dem für Gleichungen mit der Gruppe A geführten erbracht.

§ 7. Bestimmung der Gruppe einer gegebenen biquadratischen Gleichung.

Es soll nunmehr angegeben werden, wie man feststellen kann, welches die Gruppe einer gegebenen biquadratischen Gleichung ist. Dieselbe möge lauten:

$$F \equiv x^4 - c_1 x^3 + c_2 x^2 - c_3 x + c_4 = 0. \quad (1)$$

Die Diskriminante Δ von $F = 0$ setzt sich zusammen aus den beiden Invarianten:

$$\left.\begin{aligned} J &= c_2^2 + 12 c_4 - 3 c_1 c_3 \\ J' &= 9 c_1 c_2 c_3 + 72 c_2 c_4 - 27 c_1^2 c_4 - 2 c_2^3 - 27 c_3^3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

gemäss der Gleichung $\Delta = 4J^3 - J'^2$. (3)

Setzt man [1]):

$$\xi_1 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2, \quad \xi_2 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$
$$\xi_3 = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2, \quad (4)$$

so lautet die kubische Resolvente mit den Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\Phi \equiv \xi^3 - A\xi^2 + B\xi - C^2 = 0, \quad (5)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} A &= 3c_1^2 - 8c_2, \\ B &= 3c_1^4 - 16 c_1^2 c_2 + 16 c_1 c_3 + 16 c_2^2 - 64 c_4, \quad (6) \\ C &= c_1^3 - 4 c_1 c_2 + 8 c_3. \end{aligned}$$

Es kann vorkommen, dass $\Phi = 0$ eine und nur eine rationale Wurzel besitzt; dann kann man dieselbe ausscheiden und es bleibt eine quadratische Gleichung:

$$\Phi = \xi^2 + 2M\xi + N = 0 \quad (7)$$

zurück, aus deren Koefficienten man den Ausdruck $D = \frac{M^2}{N} - 1$ (8) bilde. Hiebei ist $N \neq 0$ und $D \neq 0$, da man sonst in Widerspruch mit der Annahme: „Φ hat nur eine rationale Wurzel“ gerät. Ist ξ_1 diese rationale Wurzel, so hat D in Funktion der x_i den Wert:

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3} - \frac{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}\right)^2,$$

wo der Ausdruck in der Klammer für die Substitutionen von C und nur für diese ungeändert bleibt.

Liegt nun irgend eine biquadratische Gleichung $F = 0$ vor, so wird man dieselbe zunächst nach dem in der Analysis gelehrten Verfahren auf rationale Wurzeln untersuchen; sodann bilde man gemäss (2) und (3) die Diskriminante Δ, welche entweder Null oder eine Quadratzahl oder keine Quadratzahl ist; im ersteren Fall kann von einer Galois'schen Gruppe von $F = 0$ nicht gesprochen werden. Fernerhin untersuche man $\Phi = 0$ auf rationale Wurzeln, deren es entweder drei oder eine oder keine giebt; in dem zweiten dieser Fälle hat man unter Umständen auch noch $\Phi' = 0$ und D zu bilden.

1) Die Resolvente mit den Wurzeln $x_1 x_3 + x_2 x_4$ etc. ist etwas einfacher gebaut, aber aus anderen Gründen für unsere Zwecke weniger geeignet.

Diese Operationen liefern die Kriterien für die gruppentheoretische Besonderheit von $F = 0$; in nachstehender Uebersicht sind die reducibeln Gleichungen durch einen Stern (*) ausgezeichnet.

*I) $F = 0$ habe vier rationale Wurzeln.
Sind die Wurzeln sämtlich verschieden, so besteht die Gruppe von $F = 0$ aus der identischen Substitution.

*II) $F = 0$ habe zwei rationale Wurzeln.
Nach Ausscheidung dieser Wurzeln bleibt eine irreducible quadratische Gleichung; die Gruppe von $F = 0$ ist diejenige zweiten Grads.

*III) $F = 0$ habe nur eine rationale Wurzel.
Hier ist jedenfalls $\Delta \neq 0$; ist nun

A) Δ eine Quadratzahl, so bleibt nach Ausscheidung der rationalen Wurzel eine kubische Abel'sche Gleichung zu lösen; ist dagegen

B) Δ keine Quadratzahl, so ist die kubische Gleichung eine allgemeine.

Die Gruppen von $F = 0$ sind im Fall A) die alternierende, im Fall B) die symmetrische dritten Grads.

IV) $F = 0$ habe keine rationale Wurzel.

*A) Ist $\Delta = 0$, so ist F das Quadrat eines irreducibeln quadratischen Ausdrucks.

B) Δ sei eine Quadratzahl.

1) $\Phi = 0$ habe drei rationale Wurzeln; darunter befindet sich höchstens eine Quadratzahl und einmal die Zahl Null, da man sonst in Widerspruch mit unseren Voraussetzungen kommt.

*a) $\Phi = 0$ habe eine quadratische, von Null verschiedene Wurzel ξ_1. ($\xi_2 = 0$ ist zulässig.) Dann besteht $F = 0$ aus zwei verschiedenen irreducibeln quadratischen Faktoren mit der Besonderheit, dass alle vier Gleichungswurzeln dieselbe quadratische Irrationalität enthalten; die Gruppe von $F = 0$ ist $\{1, (1\,3)\,(2\,4)\}$.

b) $\Phi = 0$ habe keine quadratische und keine verschwindende Wurzel. Dann liegt eine irreguläre Abel'sche Gleichung mit der Gruppe G vor.

c) $\Phi = 0$ habe keine quadratische Wurzel, aber die Wurzel 0; dieselbe kann nicht öfter als einmal auftreten, da sonst $\Delta = 0$ wäre. Ist dann

*α) das Produkt der beiden übrigen Wurzeln eine

Quadratzahl, so kommt man auf den Fall a) zurück; ist aber

β) das Produkt der beiden übrigen Wurzeln keine Quadratzahl, so ist G die Gruppe, wie im Fall b).

2) $\Phi = 0$ habe keine rationale Wurzel, dann ist die Gruppe von $F = 0$ die alternierende Gruppe A.

C) Δ sei keine Quadratzahl.

1) $\Phi = 0$ habe eine rationale Wurzel.

*a) Dieselbe sei eine von Null verschiedene Quadratzahl; dann zerfällt $F = 0$ in zwei verschiedene irreducible quadratische Faktoren; die vier Wurzeln von $F = 0$ enthalten zwei verschiedene quadratische Irrationalitäten; die Gruppe von $F = 0$ ist $\{1, (1\,3), (2\,4), (1\,3)\,(2\,4)\}$.

b) Die rationale Wurzel sei weder Null noch eine Quadratzahl. Dann bilde man $\Phi' = 0$ und D. Ist nun

α) D eine Quadratzahl, so ist $F = 0$ eine reguläre Abelsche Gleichung mit der Gruppe C; ist aber

β) D keine Quadratzahl, so hat man eine Gleichung mit der Gruppe H.

c) $\Phi = 0$ habe die Wurzel 0, nach deren Ausscheidung bleibt $\Phi' = 0$. Es sei nun:

*α) N eine Quadratzahl, so hat man die in a) aufgeführte Gruppe;

β) N keine Quadratzahl, so liefert D die Entscheidung wie in b).

2) $\Phi = 0$ habe keine rationale Wurzel; dann ist $F = 0$ eine allgemeine irreducible biquadratische Gleichung mit der Gruppe S.

Es sei noch ein Beispiel der Diskussion durchgeführt. Die gegebene Gleichung sei:

$$F \equiv x^4 - 10\,x^2 - 8\,x - 1 = 0,$$

also $$c_1 = 0,\ c_2 = -10,\ c_3 = 8,\ c_4 = -1.$$

Da weder $+1$ noch -1 der Gleichung genügt, so hat $F = 0$ keine rationale Wurzel, also liegt der Fall IV vor. Für die Diskriminante findet sich $\Delta = 1741824$; dies ist keine Quadratzahl, $F = 0$ gehört somit unter IV. C. Die weitere Rechnung giebt:

$$\Phi \equiv \xi^3 - 80\,\xi^2 + 1664\,\xi - 4096 = 0.$$

Das Gleichungspolynom ist teilbar durch $\xi - 32$ (IV. C. 1) b) und es bleibt der Quotient:

$$\Phi' \equiv \xi^2 - 48\,\xi + 128 = 0.$$

Hieraus berechnet sich nach (8): $D = \frac{7}{2}$; demnach gehört $F = 0$ unter IV. C. 1) b. β, und die Gruppe von $F = 0$ ist H. Die Wurzeln von $F = 0$ sind:

$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{2}},\quad x_2 = -\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{2}},\quad x_3 = \sqrt{2}-\sqrt{3+\sqrt{2}},$$
$$x_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{2}}.$$

Man erhält diese Werte, wenn man in den Formeln des § 5 $r = 1$, $b = 3$, $c = 2$ setzt.

§ 8. Algebraische Anwendungen.

I. Den Gleichungen von der Form $x^4 - 2\beta x^2 + \gamma = 0$ können verschiedene Gruppen entsprechen. Wir schliessen zunächst den Fall aus, dass $\beta^2 - \gamma$ Null oder eine Quadratzahl ist, da sonst die gegebene Gleichung reducibel ist. Es sei nun

1) γ keine Quadratzahl; ist dann

a) $\frac{\beta^2}{\gamma} - 1$ ein Quadrat, so hat man die Gruppe C, ist aber

b) $\frac{\beta^2}{\gamma} - 1$ kein Quadrat, so ist H die Gruppe. Es sei

2) γ eine Quadratzahl, $\gamma = \gamma_1{}^2$; wenn dann $\frac{\beta+\gamma_1}{2}$ keine Quadratzahlen sind, so hat man eine irreducible Gleichung mit der Gruppe G; andernfalls ist die Gleichung reducibel.

II. Für die Diskussion der reciproken biquadratischen Gleichungen:

$$x^4 - 2Ax^4 + Bx^2 - 2Ax + 1 = 0 \qquad (1)$$

sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Es sei

1) $A = 0$; wenn dann $-B + 2$ keine Quadratzahlen sind, so liegt nach dem eben Gesagten die Gruppe G vor. Ist

2) $A \neq 0$, dann ist die Diskriminante der quadratischen Resolvente mit den Wurzeln $y = x + \frac{1}{x}$:

$$D = A^2 - B + 2. \qquad (2)$$

Für die Irreducibilität ist also notwendige Bedingung, dass D weder Null noch eine Quadratzahl sei. Die Diskriminante von (1) ist bis auf einen quadratischen Zahlenfaktor:

$$\Delta = D^2 . [(B+2)^2 - (4A)^2] = D^2 . D'. \qquad (3)$$

Wir müssen also $D' = 0$ oder $B + 2 + 4A = 0$ ausschliessen.

Wenn α) D' eine Quadratzahl ist, so kann (1) entweder redu-

cibel sein oder die Gruppe G besitzen; wenn β) D′ keine Quadratzahl ist, so sind die drei in § 7. IV. C. 1 bezeichneten Fälle denkbar.

Im Fall α) ist die gegebene Gleichung dann und nur dann reducibel, wenn von den Ausdrücken E, $E' = 2(2A^2 - B \mp \sqrt{D'})$ der eine oder andere eine Quadratzahl ist; das Verschwinden dieser Ausdrücke ist durch die Voraussetzungen $A \neq 0$, $D \neq 0$ ausgeschlossen.

Im Fall β) zeigt eine einfache Rechnung, dass die Fälle IV. C. 1 a und c des § 7 unseren Voraussetzungen widersprechen. Die Entscheidung zwischen C und H liefert der Ausdruck $\frac{D'}{D}$, der in den Gleichungswurzeln den Wert $\left(\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{x_1+x_4} \cdot \frac{x_1+x_4-x_2-x_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4}\right)^2$ hat, wenn $x_1x_3 = x_2x_4 = 1$ ist. Wenn nämlich $\frac{D'}{D}$ einen Quadratzahl ist, so liegt C, im entgegengesetzten Fall H als Gruppe vor. Das Resultat ist somit:

Vorausgesetzt, dass A, D, D′ nicht verschwinden und D kein Quadrat ist, so hat man: die Gruppe G, wenn zwar D′, aber weder E, noch E′ ein Quadrat ist; C, wenn D′ kein Quadrat, aber $\frac{D'}{D}$ ein solches ist; H, wenn weder D′ noch $\frac{D'}{D}$ ein Quadrat ist.

Man kann allgemein fragen nach der gruppentheoretischen Besonderheit einer irreducibeln reciproken Gleichung vom Grad 2n:

$$x^{2n} + A_1x^{2n-1} + A_2x^{2n-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + 1 = 0. \quad (4)$$

Die Antwort lautet: Die Gruppe von (4) muss derart imprimitiv sein, dass sich n Systeme von je zwei Elementen bilden lassen, da ja (4) durch Elimination von y aus zwei Gleichungen:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad (5)$$

$$y^n + B_1y^{n-1} + \ldots + B_{n-1}y + B_n = 0 \quad (6)$$

zu erhalten ist[1]):

Allein diese gruppentheoretische Eigenschaft kommt nicht nur den reciproken Gleichungen zu, sondern allen, für die neben (6) eine Beziehung von der Form:

$$x^2(my + n) + x(m'y + n') + m''y + n'' = 0 \quad (7)$$

besteht.

---

1) Netto § 222, p. 260.

III. An die Entwicklungen des § 7 knüpft sich ferner leicht der Beweis eines von Kummer[1]) aufgestellten Satzes:

„Alle biquadratischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, welche eine rationale Wurzel haben, die nach der allgemeinen Methode der Auflösung der Gleichungen vierten Grads sich so finden lässt, dass alle notwendigen Wurzelausziehungen rational ausgeführt werden können, haben ausser dieser einen noch eine zweite rationale Wurzel und erfüllen die notwendige und hinreichende Bedingung, dass ihre vier Wurzeln von der Form

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma + \delta\sqrt{-3},\ \gamma - \delta\sqrt{-3}$$

sind, wo α, β, γ, δ rationale Grössen bedeuten."

Angenommen, die biquadratische Gleichung habe nur eine rationale Wurzel $x_1 = \alpha$, dann ist ihre Diskriminante, also auch die der kubischen Resolvente notwendig von Null verschieden; daher sind die drei Wurzeln der letzteren numerisch verschieden und gehen z. B. durch die Vertauschung (2 3 4) unter den x_i ineinander über. Hätte also die biquadratische Gleichung nur eine rationale Wurzel, so könnte die Resolvente keine rationale Wurzel haben.

Also muss die biquadratische Gleichung mindestens zwei rationale Wurzeln $x_1 = \alpha$, $x_3 = \beta$ besitzen.

a) Ist $\alpha \# \beta$, so wird

$\xi_1 = (\alpha + \beta - x_2 - x_4)^2$, $\xi_2 = (\alpha + x_2 - \beta - x_4)^2$, $\xi_3 = (\alpha + x_4 - x_2 - \beta)^2$.

Dann hat man, wenn p, q rationale Grössen sind:

$$\xi_1 + \omega^2\xi_2 + \omega\xi_3 = 3p,$$
$$\xi_1 + \omega\xi_2 + \omega^2\xi_3 = 3q,$$

woraus durch Subtraktion:

$$x_2 - x_4 = \frac{p-q}{4(\alpha - \beta)}\sqrt{-3}.$$

Setzt man: $x_2 + x_4 = 2\gamma$, $\dfrac{p-q}{4(\alpha-\beta)} = 2\delta$, so ergeben sich die von Kummer aufgestellten Ausdrücke.

Ist $p = q$, aber immer noch $\alpha \# \beta$, so wird $\delta = 0$, $x_2 = x_4 = \gamma$.

b) Ist $\alpha = \beta$, so muss auch $p = q$ sein; die 4 Gleichungswurzeln werden von der Form: $x_1 = \alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_2 = \gamma + \sqrt{r}$, $x_4 = \gamma - \sqrt{r}$, wo $\sqrt{r}$ nicht notwendig irrational ist.

Kummer hat a. a. O. auch gezeigt, dass die aufgestellten Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind; für den Fall b) ist der Beweis leicht zu ergänzen.

---

1) Monatsberichte der Berliner Akademie 1880, p. 930 f.

§ 9. Geometrische Anwendungen.

I. Als Beispiel für eine Aufgabe vierten Grads, die im allgemeinen nicht durch Zirkel und Lineal gelöst werden kann, diene das Problem [1]):

Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, von der die Schenkel eines gegebenen Winkels ein gegebenes Stück c abschneiden.

Die Lösung des Problems erfordert im Grund genommen [2]) die Bestimmung der Schnittpunkte einer Konchoide mit einer beliebigen Geraden; wir behandeln die Aufgabe zuerst mit schiefwinkligen, dann mit rechtwinkligen Koordinaten.

A) Nimmt man die Schenkel des gegebenen Winkels als X und Yaxe an und bezeichnet mit a, b die Koordinaten von P, mit

$$y - b = \lambda(x - a)$$

die gesuchte Gerade, mit p den Cosinus des gegebenen Winkels, so ist die Gleichung des Problems:

$$(a\lambda - b)^2(\lambda^2 - 2p\lambda + 1) = c^2\lambda^2.$$

Setzt man $\frac{a}{c} = \alpha$, $\frac{b}{c} = \beta$, und löst die Klammern auf, so erhält man:

$$\alpha^2\lambda^4 - 2\alpha\lambda^3(\alpha p + \beta) + \lambda^2(\alpha^2 + 4\alpha\beta p + \beta^2 - 1) - 2\beta\lambda(\alpha + \beta p) + \beta^2 = 0.$$

In den Fällen 1) $\alpha = 0$, 2) $\beta = 0$, 3) $\alpha = \pm\beta$ löst sich die Gleichung offenbar durch Quadratwurzeln: in den beiden ersten Fällen liegt P auf einer der gegebenen Geraden, im dritten Fall auf der Halbierungslinie des gegebenen Winkels oder seines Nebenwinkels.

Wir schliessen diese Fälle von der weiteren Diskussion aus und führen noch die Bezeichnungen: $\frac{1}{\alpha} = m$, $\frac{\beta}{\alpha} = n$ ein, mit denen die Gleichung des Problems wird:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3(mp + n) + \lambda^2(1 + 4mnp + n^2 - m^2) - 2n\lambda(m + np) + n^2 = 0.$$

Der Rationalitätsbereich wird konstituiert durch rationale Funktionen von m, n, p, deren Koefficienten dem absoluten Rationalitätsbereich angehören. Man sieht zunächst, dass, falls zwischen m, n, p

1) Zur Geschichte der Aufgabe sei bemerkt, dass Newton in seiner Arithmetica universalis einen speziellen, mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Fall bespricht; Lagrange kommt dann (Oeuvres T. III, p. 418) auf das Problem zurück und kritisiert die Newton'sche Lösung.

2) Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben 1879, p. 106.

keine besonderen Beziehungen bestehen, die obige Gleichung keine rationale Wurzel hat. Die Resolvente mit den Wurzeln $\eta_1 = \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4$ etc. wird:

$$\eta^3 - \eta^2(n^2 + 4np + 1 - m^2) + 4np\eta(n^2 + np + 1) - 4n^2[p^2(1 + n^2) + m^2] = 0.$$

Auch hier zeigt man durch eine einfache Rechnung die Nichtexistenz einer rationalen Wurzel. Die Gruppe des Problems kann also nur die alternierende oder symmetrische vierten Grads sein. Die Entscheidung liefert die Bildung der Diskriminante; dieselbe müsste, falls die alternierende Gruppe vorliegt, das Quadrat einer ganzen rationalen Funktion von m, n, p mit rationalen Koefficienten sein. Setzt man also — die Berechnung der Diskriminante in m, n, p ist langwierig — $m = 1$, $n = 2$, $p = 0$, so lautet die biquadratische Gleichung $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ und die Diskriminante wird $\Delta = -297216$. Nach dem eben Gesagten müsste im Fall der alternierenden Gruppe die Diskriminante des Zahlenbeispiels ein Quadrat sein; da dies nicht der Fall ist, so ist die Gruppe des Problems die symmetrische.

B) Die Behandlung der Aufgabe in rechtwinkligen Koordinaten liefert einige weitere Fälle, in denen sich das Problem durch Cirkel und Lineal lösen lässt. Nimmt man nämlich die beiden Halbierungslinien des gegebenen Winkels als Axen rechtwinkliger Koordinaten. sind a, b nunmehr die rechtwinkligen Koordinaten von P, $y + px = 0$ die Gleichungen der gegebenen Geraden, so wird die Gleichung für den Richtungskoefficienten λ des gesuchten Strahls:

$$4p^2(1 + \lambda^2)(a\lambda - b)^2 = c^2(\lambda^2 - p^2)^2.$$

Setzt man $\frac{2ap}{c} = \alpha$, $\frac{2bp}{c} = \beta$, so wird hieraus:

$$(1 + \lambda^2)(\alpha\lambda - \beta)^2 = (\lambda^2 - p^2)^2;$$

die ausgerechnete Form ist:

$$\lambda^4(1 - \alpha^2) + 2\alpha\beta\lambda^3 - \lambda^2(2p^2 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta\lambda + p^4 - \beta^2 = 0.$$

Wir geben einige Fälle an, in denen sich diese Gleichung durch Quadratwurzeln lösen lässt:

1) $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, d. h. P auf einer der Halbierungslinien des gegebenen Winkels.

2) $1 - \alpha^2 = 0$ und gleichzeitig $p^4 - \beta^2 = 0$. Dann genügen der Gleichung die Werte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = \alpha$, ferner ist $\lambda_2\lambda_4 = 1$; bei gegebenem c lassen sich die entsprechenden Lagen von P leicht konstruieren.

3) $1 - \alpha^2 = p^4 - \beta^2$. Dann wird die Gleichung des Problems

eine reciproke; berücksichtigt man die Bedeutung von α, β, so zeigt sich, dass P auf der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = c^2 \cdot \frac{1 - p^4}{4p^2}$$

liegen muss. Bezeichnet 2φ den gegebenen Winkel, ist also $p = \operatorname{tg}\varphi$, so lässt sich die rechte Seite der obigen Gleichung umformen in $\frac{c}{\sin 2\varphi} \cdot c \cot g\, 2\varphi$; schreibt man daher die Hyperbelgleichung in der Form:

$$x^2 - y^2 = \pm k^2,$$

wo das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen zu wählen ist, wenn $p \left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\} 1$ [1]), also $2\varphi \left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\} 90$, so kann k als mittlere Proportionale leicht konstruiert werden.

II. Auf die Vierergruppe G führt das Problem:

„Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch drei Punkte und zwei Tangenten gegeben ist."

Nimmt man das Dreieck der gegebenen Punkte $P_1\, P_2\, P_3$ als Koordinatendreieck, so hat die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts die Form:

$$\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} = 0. \tag{1}$$

Die Gleichungen der gegebenen Geraden a, b seien:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0,\\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dann ist die Bedingung der Berührung darstellbar durch [2]):

$$\left.\begin{aligned} (a_1 \lambda_1)^{1/2} + (a_2 \lambda_2)^{1/2} + (a_3 \lambda_3)^{1/2} &= 0,\\ (b_1 \lambda_1)^{1/2} + (b_2 \lambda_2)^{1/2} + (b_3 \lambda_3)^{1/2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

woraus man folgert, dass $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$, $\sqrt{\lambda_3}$ den Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{a_1} & \sqrt{a_2} & \sqrt{a_3} \\ \sqrt{b_1} & \sqrt{b_2} & \sqrt{b_3} \end{Vmatrix}$$

proportional sind. Man darf somit, da ohnehin nur die Verhältnisse der λ_i bestimmbar sind, setzen:

$$\lambda_1 = (\sqrt{a_2}\sqrt{b_3} - \sqrt{a_3}\sqrt{b_2})^2, \quad \lambda_2 = (\sqrt{a_3}\sqrt{b_1} - \sqrt{a_1}\sqrt{b_3})^2,$$
$$\lambda_3 = (\sqrt{a_1}\sqrt{b_2} - \sqrt{a_2}\sqrt{b_1})^2. \tag{4}$$

Der Rationalitätsbereich des Problems setzt sich zusammen aus den rationalen Funktionen der a_i und b_i, deren Koeffizienten dem absoluten Rationalitätsbereich entnommen sind. Die Vorzeichen der

1) $p = 1$ liefert ein triviales Ergebnis.

2) Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 1878, Art. 159 p. 210.

sechs auftretenden Wurzeln sind sämtlich unabhängig von einander. Bei Vorzeichenänderung von $\sqrt{a_1}$ oder von $\sqrt{b_1}$ bleibt nur λ_1 ungeändert, dagegen gehen λ_2 und λ_3 über in:

$$\lambda'_2 = (\sqrt{a_3}\sqrt{b_1} + \sqrt{a_1}\sqrt{b_3})^2, \quad \lambda'_3 = (\sqrt{a_1}\sqrt{b_2} + \sqrt{a_2}\sqrt{b_1})^2. \quad (5)$$

Daraus folgt auch, dass bei Vorzeichenänderung von mehreren der Wurzeln stets eines der λ_i ungeändert bleibt, während die beiden anderen in die gestrichenen Werte übergehen; man kann daher, um die Vertauschungen der λ_i und λ'_i zu beschreiben, sich auf die Zeichenänderungen je einer der drei Grössen $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ beschränken.

Die Gleichung der Berührungssehne der Tangenten a, b ist:

$$s_0 \equiv \Sigma x_1(\lambda_2 c_3 + \lambda_3 c_2) = 0, \quad (6)$$

wo die c_i die Koordinaten des Schnittpunkts S von a und b, also den Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} \quad (7)$$

proportional sind. Zu der Gleichung (6) treten drei analoge, indem je zwei der λ_i durch die gestrichenen Werte ersetzbar sind. Es giebt also im allgemeinen vier Kegelschnitte der verlangten Art. Ist $s_i = 0$ die Gleichung, welche aus (6) durch Vorzeichenänderung von $\sqrt{a_i}$ hervorgeht, so entspricht dem Zeichenwechsel

von $\sqrt{a_1}$ die Vertauschung $(s_0 s_1)\,(s_2 s_3)$,
„ $\sqrt{a_2}$ „ „ $(s_0 s_2)\,(s_1 s_3)$,
„ $\sqrt{a_3}$ „ „ $(s_0 s_3)\,(s_1 s_2)$.

Andere Vertauschungen sind nicht möglich, also ist G die Gruppe des Problems.

Die Geraden s_0 und s_1, sowie s_2 und s_3 schneiden sich auf $x_1 = 0$ in den Punkten $\frac{x_2}{x_3} = \pm\sqrt{\frac{a_3 b_3}{a_2 b_2}}$, d. h. in den Doppelpunkten D_1, D'_1 der auf $x_1 = 0$ durch P_2, P_3 und die Schnittpunkte A_1, B_1 mit a und b bestimmten Involution. Analoges gilt für $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Damit ist die Identität der vorstehenden analytischen Lösung mit der synthetischen[1]) gezeigt. Wir unterlassen weitere Bemerkungen, namentlich über die Determination der Aufgabe, da es nur darauf ankam, den gruppentheoretischen Charakter des Problems im allgemeinen festzustellen.

III. Wir wollen untersuchen, zu welcher Gruppe die Aufgabe gehört:

1) Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, Anhang, p. 693.

„Die Brennpunkte eines centrischen, durch seine allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitts zu bestimmen.“

Indem man ausdrückt [1]), dass die Gerade durch den Brennpunkt (x, y) nach dem unendlich fernen Punkt der Geraden $X + iY = 0$:

$$(X - x) + i(Y - y) = 0 \tag{8}$$

den Kegelschnitt

$$A \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33} = 0 \tag{9}$$

berührt und Reelles und Imaginäres trennt, erhält man die Brennpunkte als Schnitte der beiden gleichseitigen, mit A konzentrischen Hyperbeln:

$$\left.\begin{aligned} A_{33}(x^2 - y^2) - 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{11} - A_{22} &= 0, \\ A_{33}\,xy \;\; - A_{23}x - A_{13}y + A_{12} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} in der Kegelschnittsdeterminante Δ bedeutet.

Ist A eine Parabel, also $A_{33} = 0$, so werden die beiden Gleichungen (10) linear; andernfalls kann man statt (10) schreiben:

$$\begin{aligned} (A_{33}x - A_{13})^2 - (A_{33}y - A_{23})^2 &= (a_{11} - a_{22})\Delta, \\ (A_{33}x - A_{13}) \;.\; (A_{33}y - A_{23}) &= a_{12}\Delta. \end{aligned} \tag{11}$$

Setzt man noch:

$$R = \pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}, \tag{12}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} A_{33}x - A_{13} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Delta(R + a_{11} - a_{22})}, \\ A_{33}y - A_{23} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Delta(R - a_{11} + a_{22})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Der Rationalitätsbereich wird wieder gebildet durch rationale Funktionen der a_{ik} mit Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich. Setzt man die vier Werte von $A_{33}x = x_1, x_2, x_3, x_4$ und wendet die auf S. 26 und 27 angegebenen Prinzipien an, so folgt, dass H die Gruppe des Problems ist. Dasselbe geht ohne jede Rechnung daraus hervor, dass die reellen Brennpunkte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können und die Realität eines Brennpunktes nur die eines zweiten nach sich zieht. (Vgl. S. 20.)

IV. Zu derselben Gruppe führt im allgemeinen auch die Aufgabe: „Zwei affine ebene Felder in perspektive Lage zu bringen.“

Sind die beiden Felder durch zwei entsprechende (nicht ähnliche) Dreiecke ABC und A'B'C' gegeben, so lege man das letztere so auf das erstere, dass A mit A' sich deckt und BC parallel zu B'C'

1) Die Rechnung schliesst sich an Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 1878, Art. 310 p. 403 an.

wird. Man bestimmt dann leicht auf BC und B'C' Paare entsprechende Punkte XX', so dass AX = A'X' wird. Es giebt im allgemeinen zwei solcher Punktepaare: X_1, X'_1 und X_2, X'_2. Dann lege man das Dreieck A'B'C' so auf das Dreieck ABC, dass A mit A' und X_i mit X'_i sich deckt. Dies ist auf vier verschiedene Arten möglich; man bekommt die Lagen von B'C' etwa, indem man um A mit der von A' auf B'C' gefällten Höhe h'_a einen Kreis beschreibt und an diesen aus X_1 und X_2 die Tangenten legt. Kennt man eine solche Tangente aus X_1, so erhält man dazu auf eindeutige Weise die andere, ebenso auf eindeutige Weise den Punkt X_2. Von den beiden Tangenten aus X_2 ist nun aber keine bevorzugt; dieselben sind also nicht eindeutig bestimmt. Deshalb kann die Gleichung des Problems keine Abel'sche sein.

Man bestätigt das eben Gesagte leicht auf analytischem Weg, indem man die Gleichungen der Tangenten aus X_1 und X_2 aufstellt.

Berichtigung.

Auf S. 14, Z. 14 bis 23 sind die Indices 2 und 3 zu vertauschen.

Inhalt.

		Seite
Einleitung		5
§ 1.	Die Abel'schen Gleichungen dritten Grads	5— 9
§ 2.	Die Gruppen der irreducibeln biquadratischen Gleichungen	9—10
§ 3.	Die regulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads	10—14
§ 4.	Die irregulären Abel'schen Gleichungen vierten Grads	14—17
§ 5.	Die biquadratischen Gleichungen mit einer Gruppe achter Ordnung	17—20
§ 6.	Die biquadratischen Gleichungen mit alternierender und symmetrischer Gruppe	21—24
§ 7.	Bestimmung der Gruppe einer gegebenen biquadratischen Gleichung	24—28
§ 8.	Algebraische Anwendungen	28—30
§ 9.	Geometrische Anwendungen	31—36